

Задачи по теории алгоритмов¹

Машина Тьюринга

1. Выяснить, применима ли машина Тьюринга T , задаваемая программой Π , к слову P . Если применима, то найти результат применения машины T к слову P . Предполагается, что начальная и заключительные конфигурации имеют стандартную форму.

$$1) \Pi: \begin{cases} q_1 0 \rightarrow q_2 0R \\ q_1 1 \rightarrow q_1 1R \\ q_2 0 \rightarrow q_3 0R \\ q_2 1 \rightarrow q_1 1L \\ q_3 0 \rightarrow q_0 0E \\ q_3 1 \rightarrow q_2 1R \end{cases} \begin{array}{l} a) P = 1^3 0^2 1^2 \\ b) P = 1^3 0 1^3 \\ c) P = 10[01]^2 1 \end{array}$$

$$2) \Pi: \begin{cases} q_1 0 \rightarrow q_2 1R \\ q_1 1 \rightarrow q_3 0R \\ q_2 0 \rightarrow q_3 1L \\ q_2 1 \rightarrow q_2 1E \\ q_3 1 \rightarrow q_1 1R \end{cases} \begin{array}{l} a) P = 1^4 01 \\ b) P = 1^3 0 1^2 \\ c) P = 1^6 \end{array}$$

$$3) \Pi: \begin{cases} q_1 0 \rightarrow q_1 1R \\ q_1 1 \rightarrow q_2 0R \\ q_2 0 \rightarrow q_1 1R \\ q_2 1 \rightarrow q_3 1L \\ q_3 0 \rightarrow q_1 1L \end{cases} \begin{array}{l} a) P = 101^2 \\ b) P = 1^2 0^2 1 \\ c) P = [10]^2 1 \end{array}$$

2. Построить в алфавите $\{0,1\}$ машину Тьюринга, обладающую следующим свойством (в качестве пустого символа берется 0):

- 1) машина применима к любому непустому слову в алфавите $\{0,1\}$;

¹ Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. М., 1977.

- 2) машина не применима ни к какому слову в алфавите $\{0,1\}$, и зона работы на каждом слове – бесконечная;
- 3) машина не применима ни к какому слову в алфавите $\{0,1\}$, и зона работы на любом слове ограничена одним и тем же числом ячеек, не зависящим от выбранного слова;
- 4) машина применима к словам вида 1^{3n} ($n \geq 1$) и не применима ни к одному из слов вида 1^{3n+a} ($a = 1, 2$ и $n \geq 1$);
- 5) машина применима к словам вида $1^a 0 1^a$ ($a \geq 1$), и не применима к словам $1^a 0 1^b$ ($a \neq b, a \geq 1, b \geq 1$).

3. По заданной машине Тьюринга T и начальной конфигурации K_1 найти заключительную конфигурацию.

		0	1	
1) T :	q_1	$q_0 1 E$	$q_2 0 R$	a) $K_1 = 1^2 q_1 1^3 0 1$ b) $K_1 = 1 q_1 1^4$
	q_2	$q_1 0 R$	$q_2 1 L$	
		0	1	
2) T :	q_1	$q_0 0 E$	$q_2 1 R$	a) $K_1 = 1 q_1 1^5$ b) $K_1 = q_1 1^3 0 1$ c) $K_1 = 1 0 q_1 1^4$
	q_2	$q_0 1 L$	$q_3 0 R$	
	q_3	$q_1 1 L$	$q_1 0 R$	

4. Построить в алфавите $\{0,1\}$ машину Тьюринга, переводящую конфигурацию K_1 в конфигурацию K_0 .

- 1) $K_1 = q_1 1^n$, $K_0 = q_0 1^n 0 1^n$ ($n > 0$);
- 2) $K_1 = q_1 0^n 1^n$, $K_0 = q_0 [0 1]^n$ ($n > 0$);
- 3) $K_1 = 1^n q_1 0$, $K_0 = q_0 1^{2n}$ ($n > 0$);
- 4) $K_1 = 1^n q_1 0 1^m$, $K_0 = 1^m q_0 0 1^n$ ($m > 0, n > 0$).

5. 1) Показать, что для всякой машины Тьюринга существует эквивалентная ей машина, программа которой не содержит символа S .

2) Показать, что по всякой машине Тьюринга можно построить эквивалентную ей машину, в программе которой не содержится заключительное состояние.

6. Какие одноместные функции вычисляются всеми машинами Тьюринга (в алфавите $\{0,1\}$), программы которых содержат лишь по одной команде?

7. Доказать, что для всякой вычислимой функции существует машина Тьюринга, правильно вычисляющая эту функцию.

8. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию f .

$$1) f(x) = x \div 1;$$

$$2) f(x) = \overline{sg\ x} = 1 - sg\ x;$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x - 2};$$

$$4) f(x, y) = x + y;$$

$$5) f(x, y) = \frac{x}{2 - y}.$$

Классы вычислимых и рекурсивных функций

9. Применить операцию примитивной рекурсии к функциям $g(x_1)$ и $h(x_1, x_2, x_3)$ по переменным x_2 и x_3 . Функцию $f(x_1, x_2) = R(g, h)$ записать в «аналитической» форме.

$$1) g(x_1) = x_1, \quad h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3;$$

$$2) g(x_1) = x_1, \quad h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2;$$

$$3) g(x_1) = 2^{x_1}, \quad h(x_1, x_2, x_3) = x_3^{x_1} \text{ (полагаем } 0^0 = 1);$$

$$4) g(x_1) = 1, \quad h(x_1, x_2, x_3) = x_3(1 + sg|x_1 + 2 - 2x_3|);$$

$$5) g(x_1) = x_1, \quad h(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 1)sg\left(1 + \frac{x_3}{3}\right).$$

10. Доказать примитивную рекурсивность функции f .

$$1) f(x_1, x_2) = x_1 \div x_2^2;$$

$$2) f(x_1) = 3^{x_1};$$

$$3) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 \oplus x_3.$$

11. Применить операцию минимизации к функции f по переменной x_i . Результирующую функцию представить в «аналитической» форме.

$$1) f(x_i) = 3, i = 1;$$

- 2) $f(x_1) = \left\lfloor \frac{x_1}{2} \right\rfloor, i = 1;$
- 3) $f(x_1, x_2) = I_1^2(x_1, x_2), i = 2;$
- 4) $f(x_1, x_2) = x_1 \div x_2, i = 1, 2;$
- 5) $f(x_1, x_2) = x_1 - \frac{1}{x_2}, i = 1, 2;$
- 6) $f(x_1, x_2) = 2^{x_1}(2x_2 + 1), i = 1, 2.$

12. Применим операцию минимизации к подходящей примитивно рекурсивной функции, доказать, что функция f является частично рекурсивной.

- 1) $f(x_1) = 1 - x_1;$
- 2) $f(x_1) = \frac{x_1}{2};$
- 3) $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2;$
- 4) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1 - x_1 x_2}.$

13. 1) Можно ли с помощью однократного применения операции минимизации ко всюду определенной функции получить нигде неопределенную функцию?

2) Привести пример примитивно рекурсивной функции, из которой двукратным применением операции минимизации можно получить нигде неопределенную функцию.

14. Доказать вычислимость следующих функций:

- 1) $f(x, y, z) = \left\lfloor \frac{2}{x+1} \right\rfloor (x - \overline{\text{sg}}(2^x \div y)) \div (x+1)^z;$
- 2) $f(x, y, z) = \left(\frac{yz}{x-1} + 2^{y/2} \right) (y^2 \div xz);$
- 3) $f(x, y, z) = 4^{x^2 \div y^2} - (x^2 + 1)^{z-1};$
- 4) $f(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{z+1} \cdot 2^{(x^3 + y) \overline{\text{sg}}(x \div yz)}.$

15. Каковы мощности классов $K_{\text{пр}}$, $K_{\text{ор}}$, $K_{\text{чр}}$ и $K_{\text{в}}$?

16. Показать, что функция Аккермана удовлетворяет следующим условиям:

- а) $\varphi(x, y) > y$ при любых x и y ;
- б) $\varphi(x, y)$ строго монотонна по обоим переменным;

в) $\varphi(x+1, y) \geq \varphi(x, y+1)$ при любых x и y .

17. Пусть машина Тьюринга T вычисляет функцию $f_1(x) \in K_{op} \setminus K_{np}$. Верно ли всегда, что функция $f_2(x, y)$, вычислимая на этой же машине, не принадлежит K_{np} ?

18.